Zajęcia wyrównawcze z matematyki (symbol kursu: ZWM)

dla studentów I roku stacjonarnych studiów I stopnia na kierunku informatyka

w roku akademickim 2012/2013

Wymiar godzin: **45** w roku akademickim

Rozkład zajęć: **15 x 3** godz. akad.

PROGRAM ZAJĘĆ

Zajęcia 1 (3 godz.)

- **Wstęp do matematyki. Pojęcia podstawowe (2 godz.)**
  - Zdanie. Zaprzeczenie zdania
  - Koniunkcja zdań. Alternatywa zdań
  - Implikacja. Równoważność zdań. Definicja. Twierdzenie
  - Prawa logiczne. Prawa De Morgana
  - Zbiór. Działania na zbiorach
  - Zdania z kwantyfikatorem
- **Działania w zbiorach liczbowych (1 godz.)**
  - Zbiór liczb naturalnych
  - Zbiór liczb całkowitych
  - Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych
  - Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych
  - Wartość bezwzględna. Równania i nierówności z wartością bezwzględną
  - Liczby pierwsze
  - NWW i NWD

Cele edukacyjne

Student:

- pozna zdania proste i złożone;
- pozna spójniki logiczne;
- dowie się, co to jest definicja i czym różni się od twierdzenia;
- dowie się, co to jest twierdzenie odwrotne;
- pozna podstawowe prawa logiki, takie jak negacja alternatywy i negacja koniunkcji;
- pozna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiór skończony (nieskończony), element zbioru, równość zbiorów, zbiory rozłączne, dopełnienie zbioru;
- zapozna się z symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów ($\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, –, ′);
- pozna pojęcie sumy, różnicy, iloczynu i dopełnienia zbiorów;
- przypomni sobie wiadomości dotyczące liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i niewymiernych;
- pozna relacje, jakie zachodzą między podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych;
- przypomni sobie, czym jest oś liczbowa;
- pozna pojęcie przedziału (ograniczonego, nieograniczonego, otwartego, domkniętego, jednostronnie otwartego);
- nauczy się wykonywać działania na przedziałach (znajdować ich sumę, iloczyn oraz różnicę, a także dopełnienie przedziału);
- przypomni sobie własności równości i nierówności w zbiorze ***R***;
- przypomni sobie podstawowe wiadomości o równaniach;
- uzupełni wiadomości o nierównościach;
- pozna kwantyfikator ogólny i szczegółowy oraz nauczy się zaprzeczać zdania z kwantyfikatorem.
- pozna pojęcie liczby pierwszej i złożonej;

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

- pozna cechy podzielności liczb naturalnych oraz jak znajduje się NWD i NWW liczb naturalnych;
- przypomni sobie, jak wykonuje się działania na ułamkach;
- pozna pojęcie części całkowitej i ułamkowej;
- przypomni sobie prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych;
- pozna twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności;
- pozna pojęcie wartości bezwzględnej;
- pozna własności wartości bezwzględnej;
- pozna pojęcie błędu bezwzględnego i względnego;

Przykładowe zadania

Zestaw A

Zadanie 1.
Wśród poniższych wypowiedzi znajdują się zdania logiczne. Wskaż je. Oceń wartości logiczne zdań.
1) Wyjdź do ogrodu!
2) Czy dzisiaj jest klasówka z matematyki?
3) Liczba 3 jest większa od liczby 8.
4) Liczba *a* jest liczbą parzystą.
5) Warszawa jest stolicą Polski.

Zadanie 2.
Dane jest zdanie: „2 jest liczbą parzystą i liczba 5 nie jest podzielna przez 3”.
a) Oceń wartość logiczną zdania.
b) Napisz zaprzeczenie zdania; podaj prawo logiczne, z którego skorzystałeś.

Zadanie 3.
Oceń wartość logiczną zdań:
a) $-3^2 = 9$ b) $1^3 - 2^3 \neq (-1)^3$
c) $3 \cdot (1 - 8) \leq -3 \cdot (8 - 1)$

Zadanie 4.
a) Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $C \cap D$, $A - C$, jeśli: $A = \{-3, -2, -1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 3\}$, $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
b) Wykonaj działania na zbiorach: $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{W} \cup \boldsymbol{NW}$, $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{R}$.
c) Wykonaj działania na przedziałach: $(2, 5) \cup \langle 3, 8\rangle$; $(-\infty, 3) - (0, 9\rangle$; $(-7, 8\rangle \cap \langle -7, +\infty)$.

Zadanie 5.
Przedstaw liczbę 2,3(04) w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna?

Zadanie 6.
Dane jest równanie z niewiadomą *x*: $x - \sqrt{3} = 3$.
a) Podaj dziedzinę tego równania.
b) Jaka liczba spełnia to równanie?

Zestaw B

Zadanie 1.
Wiadomo, że poniższe zdania złożone są fałszywe. Co można powiedzieć o zdaniach prostych tworzących dane zdania?
a) Ania poszła do Kasi lub Ania poszła do Oli.
b) Jeśli Bartek będzie grał w gry komputerowe, to nie pójdzie do kina.

Zadanie 2.
Napisz negację zdania:
a) Pojadę na wieś lub zostanę w domu i posprzątam swój pokój.
b) Nie wyjdę z domu i obejrzę film lub poczytam książkę.
c) Jeśli zdam dobrze maturę z matematyki, to dostanę się na studia i zostanę inżynierem.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

Zadanie 3.
Oceń wartość logiczną danego twierdzenia. Następnie sformułuj twierdzenie odwrotne do danego i określ, czy jest ono fałszywe, czy prawdziwe.
a) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 3 i przez 7, to liczba ta jest podzielna przez 21.
b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 3 i przez 6, to liczba ta jest podzielna przez 18.

Zadanie 4.
Zbiór $A \cup B$ ma 7 elementów, zbiór B ma 4 elementy, zaś zbiór A ma 5 elementów. Ile elementów ma zbiór $A \cap B$?

Zadanie 5.
Wiedząc, że π jest liczbą niewymierną wykaż, że liczba $2\pi - 1$ też jest liczbą niewymierną.

Zadanie 6.
a) Wyznacz zbiory: $(-3, 2\rangle \cap \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{C} - (5, +\infty)$; $\boldsymbol{C}_+ \cup \langle 4, +\infty)$; $(2, 5) - \boldsymbol{N}$.
b) Znajdź dopełnienie danego zbioru w przestrzeni $\boldsymbol{R}$: $A = \langle -7, +\infty)$; $B = \{-4, 3, 5\}$, $C = (2, 8) \cup \{0\}$.

Zadanie 7.
Podaj przykład równania:
a) którego zbiór rozwiązań jest jednoelementowy;
b) którego zbiór rozwiązań jest dwuelementowy;
c) które jest sprzeczne;
d) które jest tożsamościowe.

Zadanie 8.
Oceń wartość logiczną zdania: $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} x^2 > 0$. Napisz zaprzeczenie tego zdania.

Zestaw C

Zadanie 1.
Na pytanie, który z trzech studentów studiował logikę otrzymano następującą odpowiedź:
„Jeśli studiował Marek, to studiował też Wacek i nieprawdą jest, że jeśli studiował Tomek, to studiował Wacek”. Który z chłopców studiował logikę?

Zadanie 2.
Co można powiedzieć o zbiorach A i B, jeśli: a) $A \cap B = B$; b) $A \cup B \subset A$; c) $A - B = A \cap B$?

Zadanie 3.
Podaj przykład równania z jedną niewiadomą, którego dziedziną jest zbiór:
a) $\boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$ i które ma tylko dwa rozwiązania: 2, 3;
b) $\langle 2, +\infty)$ i które ma tylko jedno rozwiązanie 2.

Zadanie 4.
Określ wartość logiczną zdania i podaj jego zaprzeczenie:
a) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{N}} (x + 2 > 0 \wedge x < 1000)$
b) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{C}_+} \left(\frac{x}{2} > 1 \vee x \le 0 \right)$.

Zadanie 5.
Przedstaw na osi liczbowej zbiór tych liczb rzeczywistych, które spełniają implikację
$(x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x < 2$.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

Zestaw D

Zadanie 1.

Bartek i Jurek postanowili zmierzyć odległość namiotu od przystani za pomocą swoich kroków. Bartek stawia kroki o długości 48 cm, natomiast Jurek o długości 56 cm. W jakiej odległości od namiotu znajduje się przystań, jeśli ślady stóp chłopców pokryły się 15 razy? Wynik wyraź w metrach.

Zadanie 2.

Znajdź liczbę wymierną, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami:

a) $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$ c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$

Zadanie 3.

a) Rozwiąż nierówność: $\frac{x-2}{3}-\frac{x+5}{2}>5-x$.

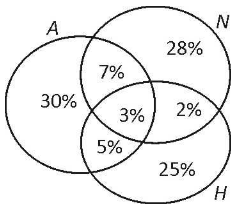
b) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą spełniającą tę nierówność.

Zadanie 4.

Jabłka zdrożały o 20% i wówczas cena jednego kilograma jabłek wynosiła 4,80 zł. O ile procent cena jabłek przed podwyżką była niższa niż po podwyżce?

Zadanie 5.

Uczestnicy obozu językowego posługiwali się trzema językami obcymi: angielskim (*A*), hiszpańskim (*H*) i niemieckim (*N*), zgodnie z następującym podziałem procentowym:



a) Jaki procent wszystkich uczestników obozu znało język angielski?

b) Jaki procent osób znających język niemiecki znało również pozostałe dwa języki?

c) O ile punktów procentowych więcej było na obozie osób ze znajomością tylko języka angielskiego od osób, które znały tylko język hiszpański?

d) O ile procent mniej było na obozie uczniów, którzy znali tylko język hiszpański od uczniów, którzy znali język angielski lub niemiecki?

Zadanie 6.

a) Porównaj liczby: $a = \left|\frac{\sqrt{5}}{5}-1\right|$ oraz $b = |-1,5|$.

b) Oblicz odległość między liczbami –6 i 12.

c) Rozwiąż równanie $|x|=3$ i nierówność $|x|<5$.

Zestaw E

Zadanie 1.

Wyznacz zbiory $(A \cap B) - D$, $A \cup B$, $(A - B) - D$, jeśli: $A = \{x: x \in \boldsymbol{C}$ i $x \in \langle -3, 4)\}$,
$B = (-1, 2\rangle$, $D = \{x : x \in \boldsymbol{R}$ i $|x - 2| = 4\}$

Zadanie 2.

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

Zadanie 3.

Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, rozwiąż równanie:
$|x + 3,5| = 5$.

a) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą, która jest większa od rozwiązań tego równania.

b) Wyznacz odwrotność liczby $\frac{|a-b|}{4}$, gdzie *a*, *b* są rozwiązaniami danego równania.

Zadanie 4.
a) Oblicz: $|2 - 3\sqrt{3}|$
b) Rozwiąż nierówność: $\sqrt{x^2+6x+9} \geq 4$
c) Przedział liczbowy (–5, 7) jest zbiorem rozwiązań pewnej nierówności z wartością bezwzględną. Zapisz tę nierówność.

Zadanie 5.
Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech dowolnych kolejnych liczb całkowitych wynosi 2.

Zadanie 6.
Rozwiąż:
a) równanie $|x + 1| + |x^2 - 1| = 0$
b) nierówność $|2 - x| + |x \cdot (x - 2)| \leq 0$.

Zadanie 7.
Sprawdź (nie używając kalkulatora), czy liczba $\frac{2\sqrt{5}-1}{5}$ należy do przedziału $\left(\frac{3}{5},\ 1\right)$.

Zestaw F

Zadanie 1.
Iloczyn dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 1728, a największy ich wspólny dzielnik równa się 24. Znajdź te liczby.

Zadanie 2.
Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, spełniających równanie: $x \cdot y - 2y = 5 - x$.

Zadanie 3.
Wyznacz wszystkie liczby pierwsze *a* i *b*, które spełniają warunek: $a^2 - 1 = 2b^2$.

Zadanie 4.
Zbadaj liczbę rozwiązań równania $|x - 6| + |1 + x| = m$ ze względu na wartość parametru *m*.

Zajęcia 2 (3 godz.)

- **Sprawdzian 1 godz.**

Zadanie 1
Rozwiąż równanie $x^{2\log^3 x - \frac{3}{2}\log x} = \sqrt{10}$

Zadanie 2
Obliczyć trzeci wyraz ciągu 2^{x1}, 2^{x2}, 2^{x3},… wiedząc, że jest to ciąg geometryczny i że $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + +x_{10} = 110$ oraz, że $x_7 = 14$.

Zadanie 3
Rozwiązać równanie: $x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3n}{2-9n}$

Zadanie 4
Wyznaczyć zbiór A∩B jeżeli : $A = \left\{x: x\epsilon R \wedge \sqrt{(2x-1)^2} < 2\right\}$ i $B = \{x: x\epsilon R \wedge \log_{0,5} x \leq \log_{0,5}(2-x)\}$

Zadanie 5
W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczyć zbiór: $A = \{(x, y): x\epsilon R \wedge y\epsilon R \wedge x^2 - y^2 \geq 0\}$

i wyznaczyć ten punkt zbioru A, który jest położony najbliżej punktu K(1,2)

<u>Zadanie 6</u>

Dane są funkcje $f(x)=x+\frac{1}{x}$ oraz $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5)$. Rozwiąż równanie $f(g(x))\leq g(3)$

<u>Zadanie 7</u>

Oblicz $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{5+7+9+\cdots+(2n+3)}\right)$

<u>Zadanie 8</u>

W urnie I są 4 kule białe i 5 czarnych, a w urnie II 6 kul białych i 3 czarne. Rzucamy kostką. Jeżeli wypadnie liczba oczek podzielna przez 3 to losujemy 1 kulę z urny I, w przeciwnym przypadku losujemy 1 kulę z urny II. Oblicz prawdopodobieństwo, że w wyniku tego doświadczenia wylosujemy kulę białą.

- **<u>Wyrażenia algebraiczne (2 godz.)</u>**
  - Potęga o wykładniku naturalnym
  - Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej
  - Działania na wyrażeniach algebraicznych
  - Wzory skróconego mnożenia
  - Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym
  - Potęga o wykładniku wymiernym
  - Potęga o wykładniku rzeczywistym

<u>Cele edukacyjne</u>

Student:

- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku naturalnym;
- przypomni sobie prawa działań na pierwiastkach arytmetycznych;
- pozna pojęcie pierwiastka stopnia nieparzystego z liczby ujemnej;
- przypomni sobie działania na wyrażeniach algebraicznych;
- pozna wzory skróconego mnożenia: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

- nauczy się rozkładać wyrażenia algebraiczne na czynniki za pomocą poznanych wzorów skróconego mnożenia;

- nauczy się usuwać niewymierność z mianownika lub licznika ułamka;
- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku całkowitym;
- przypomni sobie zapis liczby w notacji wykładniczej;
- pozna pojęcie potęgi o wykładniku wymiernym i własności działań na takich potęgach;
- pozna, jak konstruuje się potęgę o wykładniku niewymiernym;
- pozna prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- pozna pojęcie dowodu wprost oraz dowodu nie wprost;
- pozna określenie logarytmu;
- pozna podstawowe własności logarytmu (wzór na logarytm ilorazu, iloczynu, potęgi);
- pozna wzór na zamianę podstaw logarytmu;
- pozna przykładowe zastosowania logarytmów;
- przypomni sobie pojęcie średniej arytmetycznej oraz pozna pojęcie średniej geometrycznej i średniej ważonej.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY"
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy"

Przykładowe zadania

Zestaw A

Zadanie 1.

Oblicz wartość wyrażenia: $8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3^2+4^2} + \left(\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(27^{-\frac{2}{3}}\right) + \sqrt[3]{-64}$

Zadanie 2.

Usuń niewymierność z mianownika ułamka: a) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{8}-4}{2-\sqrt{2}}$

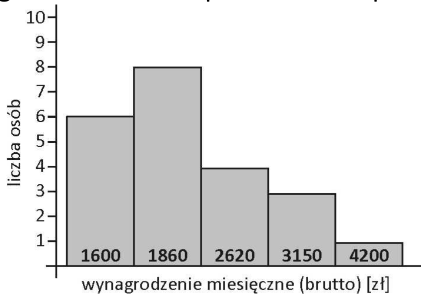
Zadanie 3.
Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:
a) $(a-b)-(a-b)^2$
b) $(b-a)xy+(a-b)xyz-(b-a)z^2$.

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi to $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

Zadanie 5.
Oblicz: $3\log(\log_2 32 \cdot \log_5 25)$.

Zadanie 6.
Wyznacz podaną wielkość ze wzoru:
a) $\frac{1}{f}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; f b) $P=2\pi r(r+h)$; h.

Zadanie 7.
Poniższy diagram przedstawia wynagrodzenie brutto pracowników pewnej firmy w tym miesiącu.



a) Oblicz średnie wynagrodzenie brutto w tej firmie.
b) Podaj, jaki procent pracowników zarabia więcej, niż wynosi średnie wynagrodzenie w tej firmie.
c) Od przyszłego miesiąca każdy pracownik ma zarabiać o 100 zł więcej, niż w tym miesiącu. Oblicz średni procent, o jaki planowany jest wzrost wynagrodzeń w tej firmie.
Wyniki podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do 0,1%.

Zestaw B

Zadanie 1.
Sprowadź wyrażenie:

$[y^3 : (y^2 \cdot y^{-3})]^4 : \left[\left(\frac{1}{y}\right)^4 \cdot \frac{1}{y^{-2}}\right]^{-3}$ do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $y=\sqrt{2\sqrt{2}}$.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

Zadanie 2.

Oblicz wartość wyrażenia: $\left[\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

Zadanie 3.
Wykaż, że:
a) liczba $6^{20}+3\cdot 6^{19}-4\cdot 6^{18}$ jest podzielna przez 5.
b) liczba $5^{18}-1$ jest podzielna przez 31.

Zadanie 4.

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{9-3\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}}$

Zadanie 5.

Oblicz (bez użycia kalkulatora) przybliżoną wartość potęgi: $0{,}0001^{-\sqrt{5}}$, jeśli $\sqrt{5}\approx 2{,}25$

Zadanie 6.
Wykaż, że jeśli $a+b=1$ i $a^2+b^2=5$, to
$a^4+b^4=17$.

Zadanie 7.
Wykaż, stosując dowód nie wprost, że jeśli liczby a i b są dodatnie, to $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

Zadanie 8.
Wykaż, że jeśli $x+y=6$, $x\in \boldsymbol{R}$ i $y\in \boldsymbol{R}$, to $x^2+y^2\geq 18$.

Zadanie 9.

Wykaż, że jeśli $a>2$ i $b<4$, to $\frac{ab}{2}+4<b+2a$.

Zadanie 10.
Niech $\log 2=a$ i $\log 3=b$. Wyraź za pomocą a i b wyrażenie: $\log 8\cdot\log_8 6$.

Zadanie 11.
Na wycieczkę w góry pojechało 21 osób o średniej wieku 23 lata. Średnia ta wzrosła do 24 lat, po doliczeniu wieku przewodnika, który dołączył do wycieczki w Zakopanem. Ile lat miał przewodnik?

Zestaw C

Zadanie 1.

Wykaż, że liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[4]{4}$ jest całkowita.

Zadanie 2.
Rozłóż na czynniki wyrażenia:
a) x^4+1
b) $x^5-5x^3-8x^2+40$.

Zadanie 3.

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$

Zadanie 4.

Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie i $x+y+z=1$ to $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$.

Zadanie 5.
Oblicz wartość pH kwasu solnego, wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w tym kwasie jest równe 0,05 mol/dm^3. Wynik podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

Zajęcia 3 (3 godz.)

- **Trygonometria**
  - Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym
  - Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30°, 45° i 60°
  - Kąt skierowany
  - Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta
  - Podstawowe tożsamości trygonometryczne
  - Wzory redukcyjne

Cele edukacyjne

Student:

- pozna określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym;
- nauczy się obliczać wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;
- pozna pojęcie kąta skierowanego;
- pozna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;
- pozna podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta;
- pozna wzory redukcyjne;

Przykładowe zadania

Zestaw A

Zadanie 1.

Oblicz wartość wyrażenia:

$\sin 30° \cdot \cos 60° + \mathrm{tg}\, 45° \cdot \mathrm{ctg}\, 30°$.

Zadanie 2.

W trójkącie prostokątnym *ABC* dane są: długość przeciwprostokątnej $|BC| = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $|AB| = 5$ cm.

a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych).

c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta, jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną.

Zadanie 3.

Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża?

Zadanie 4.

Wyznacz, korzystając z definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.

Zadanie 5.

Oblicz, stosując odpowiednie wzory redukcyjne, wartość wyrażenia:

a) $\sin 135° + \mathrm{tg}\, 120° \cdot \cos 150°$

b) $\sin^2 17° + \sin^2 73° - \cos 120°$.

Zadanie 6.

Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora: $\mathrm{tg}\, 30° \cdot \mathrm{tg}\, 40° \cdot \mathrm{tg}\, 130°$.

Zadanie 7.

Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że prawdziwa jest zależność:

$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$.

Zadanie 8.

Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (90°, 180°)$ takiej, że a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ b) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -4$.

Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zadanie 9.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{5\sin\alpha - 4\cos\alpha}{3\cos\alpha + 8\sin\alpha}$ wiedząc, że tg $\alpha = \frac{2}{3}$.

Zestaw B

Zadanie 1.

Zbuduj kąt o mierze α takiej, że a) sin $\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) tg $\alpha = -\sqrt{7}$.

Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zadanie 2.

Posługując się wzorem cos2α = 1 – 2sin$^2\alpha$, oblicz sin 15°.

Zadanie 3.

W trójkącie prostokątnym *a*, *b* oznaczają długości przyprostokątnych, α jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości *a*. Wiedząc, że cos $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, oblicz:

a) tangens α;

b) wartość wyrażenia: $\frac{b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2 - b^2}$.

Zadanie 4.

Sprawdź, czy równość

$\frac{\cos\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

Zadanie 5.

Oblicz wartość wyrażenia: sin 960° · tg 420° – cos 1410°.

Zadanie 6.

Oblicz długość środkowej *CD* w trójkącie *ABC*, jeśli dane są długości boków trójkąta: *a* = 5, *b* = 6, *c* = 10.

Zadanie 7.

W trójkącie *ABC* dane są długości boków:

$a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3 - \sqrt{3}$. Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta oraz promień koła opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 8.

W pewnym trójkącie miary kątów α, β, γ spełniają warunek: sin$^2\alpha$ – sin$^2\beta$ = sin$^2\gamma$.
Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny.

Zestaw C

Zadanie 1.

Wiedząc, że sin α + cos $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz:

a) |sin α – cos α|,
b) sin$^3\alpha$ + cos$^3\alpha$;
c) sin$^4\alpha$ + cos$^4\alpha$.

Zadanie 2.

Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się na wysokości *h* metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie *t* sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością *v* wznosi się balon?

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY"
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy"

Zadanie 3.

Wykaż, że jeśli *a*, *b*, *c* są długościami boków trójkąta oraz $a < \frac{b+c}{2}$, to miary kątów α, β, γ, leżących naprzeciw tych boków, spełniają nierówność $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$.

Zajęcia 4 i 5 (6 godz.)

- **Funkcja i jej własności**
  - Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Dziedzina i zbiór wartości funkcji
  - Sposoby opisywania funkcji
  - Wykres funkcji
  - Dziedzina funkcji liczbowej
  - Zbiór wartości funkcji liczbowej
  - Miejsce zerowe funkcji
  - Równość funkcji
  - Monotoniczność funkcji
  - Funkcje różnowartościowe
  - Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste
  - Funkcje okresowe
  - Największa i najmniejsza wartość funkcji liczbowej
  - Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach

Cele edukacyjne

Student:

- przypomni sobie pojęcie funkcji;
- pozna różne sposoby opisywania funkcji (graf, wzór, tabela, wykres, opis słowny);
- pozna takie pojęcia, jak: dziedzina, zbiór wartości, miejsce zerowe funkcji liczbowej;
- pozna takie pojęcia, jak: równość funkcji, różnowartościowość, monotoniczność, parzystość, nieparzystość, okresowość;
- nauczy się badać na podstawie definicji własności funkcji, takie jak: monotoniczność, różnowartościowość, parzystość, nieparzystość;
- pozna wykresy niektórych funkcji, np. $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = [x]$, $y = \operatorname{sgn} x$;
- pozna pojęcie najmniejszej i największej wartości funkcji;
- nauczy się odczytywać własności funkcji na podstawie jej wykresu;
- nauczy się szkicować wykres funkcji o podanych własnościach;
- nauczy się opisywać, interpretować i przetwarzać informacje wyrażone w postaci wzoru lub wykresu funkcji.

Przykładowe zadania

Zestaw A

Zadanie 1.

Dana jest funkcja określona za pomocą opisu słownego: *„Każdej liczbie ze zbioru* A = *{0, 1, 4, 9, 16} przyporządkowujemy pierwiastek kwadratowy tej liczby”.* Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru, a następnie naszkicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Podaj zbiór wartości tej funkcji i jej miejsce zerowe.

Zadanie 2.

Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{-x}}$.

a) Określ dziedzinę tej funkcji.

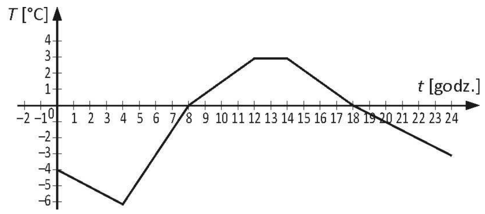
b) Czy funkcja ta posiada miejsce zerowe? Odpowiedź uzasadnij.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu (–9).

<u>Zadanie 3.</u>

Poniżej podany jest dobowy wykres temperatury.



Odpowiedz na pytania:

a) W jakich godzinach dokonywano pomiaru?

b) W jakim przedziale mieszczą się zanotowane temperatury?

c) W jakich godzinach temperatura wyniosła 0°?

d) W jakich godzinach temperatura była dodatnia, a w jakich ujemna?

e) W jakich godzinach temperatura rosła, a w jakich malała?

f) Jaką wartość miała temperatura w godzinach $\langle 12, 14 \rangle$?

g) Jaką najniższą wartość wskazał termograf?

<u>Zadanie 4.</u>

Odległość *d* [km] ustalonego kolarza peletonu od mety w zależności od czasu jazdy *t* [h] (od chwili rozpoczęcia wyścigu do chwili przejechania mety) opisuje wzór: $d(t) = 180 - 45t$.

a) Ile godzin potrzeba, aby kolarz przejechał linię mety wyścigu?

b) W jakiej odległości od mety będzie znajdował się kolarz po 40 minutach jazdy?

c) Po jakim czasie od startu kolarz będzie znajdował się 30 km od mety?

d) Jaką długość ma etap wyścigu?

<u>Zadanie 5.</u>

Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż:

a) równanie $x^2 = x$

b) b) nierówność $\frac{1}{x} > x^3$.

Zestaw B

<u>Zadanie 1.</u>

a) Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem $f(x) = \sqrt{3-2x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x}$.

b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji o wzorze $f(x) = \frac{|x+2|-1}{x^2-1}$.

<u>Zadanie 2.</u>

Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -6, 6 \rangle$; zbiorem wartości jest przedział $\langle 1, +\infty)$; wykres funkcji jest symetryczny względem osi *OY*; funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -6, 0 \rangle$ oraz $f(0) = 4$. Czy istnieje tylko jedna taka funkcja?

<u>Zadanie 3.</u>

Naszkicuj wykres i omów własności funkcji określonej wzorem: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \le -2 \\ x^3 & \text{dla } -1 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

a) Oblicz wartość funkcji *f* dla argumentu $3\frac{3}{8}$.

b) Dla jakiego dodatniego argumentu *a* zachodzi równość $f(a) = -f(-a)$?

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY"
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy"

Zadanie 4.

W pewnym kraju obowiązuje system podatkowy opisany wzorem: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 \le x \le 800 \\ 0{,}05x - 40 \text{ dla } 800 < x \le 2000 \\ 0{,}2x - 340 \text{ dla } x > 2000 \end{cases}$

gdzie x – oznacza wysokość dochodów rocznych podatnika w dolarach, zaś $f(x)$ oznacza wysokość podatku, jaki zobowiązany jest zapłacić podatnik.
Oblicz, który z podatników zapłaci większy podatek i o ile procent większy, jeśli dochód roczny pierwszego z nich wyniósł 1260 USD, zaś drugiego 3480 USD. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 5.
Wykaż na podstawie definicji, że funkcja określona wzorem:
a) $f(x) = x^2 - 2x$ jest rosnąca w zbiorze $(1, +\infty)$;
b) $f(x)= \frac{x-1}{x+4}$ jest różnowartościowa;
c) $f(x) = \frac{4x^4 - 5x^2}{x^2 - 1}$ jest parzysta.

Zadanie 6.
Wyznacz najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x) = (2x - 3)^2$ w przedziale $\langle -4, 6 \rangle$.

Zestaw C

Zadanie 1.
Przedstaw funkcję określoną wzorem $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x - 3}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, 3\}$,
w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej.

Zadanie 2.
Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ przyjmuje największą wartość równą 4, a najmniejszą równą 2.

Zadanie 3
Wykaż, że funkcja określona wzorem
$f(x) = 3 - 2x^3$ jest
a) malejąca,
b) różnowartościowa.

- **Przekształcenia wykresów funkcji**
  - Podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych
  - Przesuniecie równoległe o wektor [p, q]
  - Symetria osiowa względem osi OX i osi OY
  - Symetria środkowa względem punktu (0,0)
  - Wykres funkcji y = |f(x)|oraz y = f(|x|)

Cele edukacyjne
Student:

- pozna pojęcie wektora w układzie współrzędnych;
- nauczy się dodawać i odejmować wektory oraz mnożyć wektor przez liczbę;
- pozna pojęcie wektorów przeciwnych;
- pozna pojęcie przesunięcia równoległego w układzie współrzędnych;
- nauczy się przesuwać równolegle wykres funkcji wzdłuż o wektor $\vec{w}$ = [p, q];
- pozna pojęcie symetrii osiowej w układzie współrzędnych;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię względem osi OX;

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY"
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy"

- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię względem osi OY;
- pozna pojęcie symetrii środkowej w układzie współrzędnych;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji: $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji: $y = c \cdot f(x)$ oraz $y = f(c \cdot x)$, gdzie $c \neq 0$;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności z wykorzystaniem wykresów funkcji.

Przykładowe zadania

Zestaw A

Zadanie 1.

Dane są punkty: $A(2, 5)$, $B(-4, 6)$.

a) Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$.

b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

c) Wyznacz współrzędne środka odcinka *AB*.

Zadanie 2.

Dane są wektory: $\vec{a} = [1, -1]$, $\vec{b} = [2, -1]$, $\vec{c} = [-5, -7]$. Wyznacz takie liczby rzeczywiste *k*, *l*, aby $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

Zadanie 3.

W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj odcinek *AB*, gdzie $A(-2, 4)$, $B(-5, -3)$, a następnie wyznacz współrzędne końców obrazu tego odcinka:

a) w symetrii względem osi *OX*

b) w symetrii względem osi *OY*

c) w symetrii względem początku układu współrzędnych

d) w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [1, -3]$.

Zadanie 4.

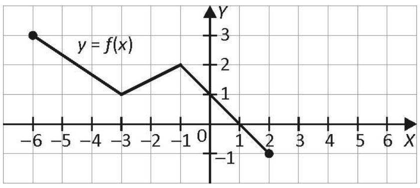
Dana jest funkcja $f(x) = x^3$. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = x^3 + 2$; b) $y = (x + 1)^3$; c) $y = -x^3$;

d) $y = (x - 1)^3 - 4$.

Zadanie 5.

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



a) Napisz wzór funkcji *g*, której wykres powstanie w wyniku przesunięcia wykresu funkcji *f* wzdłuż osi *OX* o 4 jednostki w prawo. Jakie miejsca zerowe ma funkcja *g*?

b) b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji *h*, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji *f* w symetrii względem osi *OX*.

Zestaw B

Zadanie 1.

Dany jest odcinek o końcach $A(2, -5)$, $B(-4, 7)$. Wyznacz współrzędne punktu *P*, który dzieli odcinek *AB* w taki sposób, że $\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{1}{3}$.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

Zadanie 2.
O jaki wektor należy przesunąć równolegle wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 3$, aby otrzymać wykres funkcji:
a) $g(x) = \sqrt{x} + 1$ b) $h(x) = \sqrt{x+2}$?

Zadanie 3.
Dana jest funkcja $g(x) = 2x - 6$. Jej wykres powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji f.

Zadanie 4.
Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ naszkicuj wykresy funkcji:
a) $y = 3 - \sqrt{x+2}$
b) $y = \sqrt{-x+2} + 1$
c) $y = |\sqrt{x} - 4|$
d) $y = \frac{1}{4}\sqrt{|x|}$

Zadanie 5.
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x - 2|$. Na podstawie wykresu tej funkcji rozwiąż:
a) równania: $|x - 2| = 3$; $|x - 2| = x$
b) nierówności: $|x - 2| \leq 2$; $|x - 2| > x^2$.

Zadanie 6.
Funkcja $y = f(x)$ jest określona w zbiorze $\boldsymbol{R}$ i jest okresowa o okresie podstawowym równym 6. Wyznacz okres podstawowy funkcji $g(x) = f(\frac{2}{3}x)$.

Zadanie 7.
W oparciu o wykres odpowiedniej funkcji podaj liczbę rozwiązań równania, w zależności od wartości parametru m:
a) $|x - 5| - 2 = m$ b) $\left|\frac{1}{x} - 2\right| = m + 4$.

Zestaw C

Zadanie 1.
W jaki sposób przekształcić wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{4x-3} + 2$?

Zadanie 2.
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 1$, a następnie na jego podstawie, sporządź wykres funkcji $g(x) = 4 - f(|-x + 1|)$. Podaj wzór funkcji g.

Zadanie 3.
Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{|x|-1}$, a następnie:

a) podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g
b) podaj przedziały monotoniczności funkcji g
c) wykaż, że funkcja g jest parzysta
d) podaj zbiór rozwiązań nierówności $\frac{2}{|x|-1} \geq |x|$.

Zadanie 4.
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|3 - |x - 2|| = m + 7$ ma więcej rozwiązań dodatnich niż ujemnych.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY"
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy"

Zajęcia 6 (3 godz.)

- **Funkcja kwadratowa**
  - Postać ogólna, kanoniczna i iloczynowa funkcji kwadratowej.
  - Wzory Viete'a i ich zastosowanie.
  - Równania i nierówności kwadratowe

Cele edukacyjne

Student:

- pozna własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$;
- nauczy się przedstawiać wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej;
- pozna wzory Viète'a i ich zastosowanie;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji kwadratowych o zadanych własnościach;
- nauczy się odczytywać własności funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu;
- nauczy się wyznaczać najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- nauczy się stosować własności funkcji kwadratowej w zadaniach optymalizacyjnych;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe;
- nauczy się rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną (będzie je również interpretować graficznie);
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z parametrem (korzystając z własności funkcji kwadratowej i wzorów Viète'a);
- nauczy się przeprowadzać dyskusję liczby rozwiązań równania kwadratowego z wartością bezwzględną i parametrem (na podstawie interpretacji graficznej zadania).

- **Wielomiany**
  - Pojęcie wielomianu st. n ($n \in \boldsymbol{N}+$) jednej zmiennej rzeczywistej. Twierdzenie o równości wielomianów.
  - Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów, dzielenie wielomianów (w tym za pomocą schematu Hornera).
  - Pierwiastek wielomianu, pierwiastek wielokrotny, twierdzenie Bezouta.
  - Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych i jego zastosowanie.
  - Metody rozkładania wielomianów na czynniki.
  - Równania wielomianowe.
  - Nierówności wielomianowe.

Cele edukacyjne

Student:

- pozna pojęcie wielomianu stopnia n ($n \in \boldsymbol{N}_+$) jednej zmiennej rzeczywistej;
- pozna twierdzenie o równości wielomianów i nauczy się je stosować;
- pozna takie działania na wielomianach jak: dodawanie, odejmowanie i mnożenie;
- nauczy się dzielić wielomian przez wielomian;
- nauczy się dzielić wielomian przez dwumian za pomocą schematu Hornera;
- pozna pojęcie pierwiastka wielokrotnego wielomianu;
- pozna twierdzenie Bezouta i nauczy się je stosować;
- pozna twierdzenie o reszcie i nauczy się je stosować;
- pozna twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych i nauczy się je stosować;
- pozna metody rozkładania na czynniki (wyłączanie czynnika poza nawias, wzorów skróconego mnożenia, metoda grupowania wyrazów, metoda „prób");
- nauczy się rozwiązywać równania wielomianowe;
- pozna pojęcie funkcji wielomianowej;
- nauczy się rozwiązywać nierówności wielomianowe;
- posiądzie umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych prowadzących do równań wielomianowych;

- nauczy się rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów w oparciu o poznane twierdzenia.

- **Funkcje wymierne**
    - Pojęcie funkcji wymiernej. Dziedzina funkcji wymiernej. Równość funkcji wymiernych.
    - Działania na wyrażeniach wymiernych.
    - Równania wymierne i nierówności wymierne (w tym z wartością bezwzględną)

Cele edukacyjne

Student:

- pozna określenie ułamka algebraicznego;
- nauczy się skracać i rozszerzać ułamki algebraiczne;
- nauczy się dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki algebraiczne;
- nauczy się rozwiązywać proste równania wymierne;
- nauczy się rozwiązywać proste nierówności wymierne;
- nauczy się rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych;
- pozna definicję funkcji wymiernej;
- nauczy się wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej;
- pozna wykres i własności funkcji $y = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$;
- przypomni sobie, co to są wielkości odwrotnie proporcjonalne;
- pozna funkcję homograficzną;
- nauczy się rysować wykresy funkcji homograficznych;
- nauczy się opisywać własności funkcji homograficznej na podstawie jej wykresu;
- nauczy się rozwiązywać zadania z wykorzystaniem własności funkcji homograficznej;
- będzie rozwiązywał zadania dotyczące własności funkcji wymiernych.

Zajęcia 7 (3 godz.)

- **Ciągi**
    - Definicja ciągu; ciąg liczbowy; sposoby opisywania ciągów.
    - Ciągi zdefiniowane rekurencyjnie.
    - Ciągi monotoniczne.
    - Granica ciągu liczbowego.
    - Ciągi rozbieżne do nieskończoności.
    - Ciąg arytmetyczny i jego własności.

Cele edukacyjne

Student:

- pozna definicję ciągu;
- pozna sposoby opisywania ciągów (wzór ogólny, wykres);
- pozna definicję rekurencyjną ciągu liczbowego;
- pozna definicję ciągu monotonicznego i nauczy się badać monotoniczność ciągu;
- pozna definicję ciągu arytmetycznego;
- pozna własności ciągu arytmetycznego;
- nauczy się stosować w zadaniach poznane wzory dotyczące ciągu arytmetycznego (n-ty wyraz ciągu, suma n początkowych wyrazów tego ciągu, średnia arytmetyczna);

Zajęcia 8 (3 godz.)

- **Ciągi**
    - Ciąg geometryczny i jego własności.
    - Definicja Heinego granicy funkcji w punkcie. Granice jednostronne. Obliczanie granic funkcji w punkcie.
    - Granica funkcji w nieskończoności.

Cele edukacyjne

Student:

- pozna definicję ciągu geometrycznego;
- pozna własności ciągu geometrycznego;
- nauczy się stosować w zadaniach poznane wzory dotyczące ciągu geometrycznego (n-ty wyraz ciągu, suma n początkowych wyrazów ciągu, średnia geometryczna);
- pozna pojęcie procentu prostego i składanego;
- nauczy się rozwiązywać zadania dotyczące lokat i kredytów;
- pozna definicję granicy ciągu liczbowego;
- nauczy się dowodzić na podstawie definicji granicy ciągu, że dana liczba jest granicą ciągu;
- pozna własności ciągów zbieżnych i nauczy się je stosować;
- pozna definicję ciągu rozbieżnego do nieskończoności;
- pozna własności ciągów rozbieżnych do nieskończoności;
- nauczy się obliczać granice niewłaściwe ciągów rozbieżnych do nieskończoności;
- pozna pojęcie szeregu geometrycznego;
- nauczy się wyznaczać sumę szeregu geometrycznego zbieżnego;
- nauczy się stosować wiadomości o szeregu geometrycznym w zadaniach.

Zajęcia 9 (3 godz.)

- **Funkcja potęgowa i wykładnicza**
  - Potęga o wykładniku wymiernym .
  - Potęga o wykładniku niewymiernym.
  - Funkcja potęgowa i jej własności.
  - Funkcja wykładnicza i jej własności.
  - Równania wykładnicze.
  - Nierówności wykładnicze.
  - Układy równań i nierówności wykładniczych.

Cele edukacyjne

Student:

- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- będzie doskonalił umiejętności wykonywania działań na potęgach;
- pozna pojęcie funkcji wykładniczej;
- pozna własności funkcji wykładniczej;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- nauczy się rozwiązywać proste równania i nierówności wykładnicze;

Przykładowe zadania

Zadanie 1

Rozwiąż nierówność $10\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$

Zadanie 2

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których równanie $2^{x^2+(2-3p)x+2p^2-5p} = 8$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest najmniejszy.

Zadanie 3

Dla jakich wartości parametru m równanie $(1-m)9^x + 4*3^x - (m+2) = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 4

Rozwiąż równanie $|5^x - 1| = 4*5^x$

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

Zadanie 5

Rozwiąż nierówność $256^{\frac{1}{x^2-4}} * \left(\frac{4}{2^x}\right)^{\frac{1}{x+2}} \leq 4^{\frac{1}{x-2}}$

Zadanie 6

Dla jakich wartości k równanie $(k-2)25^x - k * 5^x + 2 = 0$ ma dokładnie 1 pierwiastek?

Zadanie 7

Dla jakich wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + 4^a x^2 - 3^{2a} x + 1$ przez (x-1) jest równa 2.

Zadanie 8

Rozwiąż równanie $7 * 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

Zajęcia 10 (3 godz.)

- **Logarytm i funkcja logarytmiczna**
  - Pojęcie logarytmu.
  - Własności logarytmów.
  - Funkcja logarytmiczna i jej własności.
  - Równania logarytmiczne i nierówności logarytmiczne.

Cele edukacyjne

Student:

- przypomni sobie pojęcie logarytmu;
- przypomni sobie własności logarytmów i ich zastosowanie w rozwiązywaniu zadań;
- pozna pojęcie funkcji logarytmicznej;
- zapozna się z własnościami funkcji logarytmicznej;
- będzie doskonalił umiejętność przekształcania wykresów funkcji logarytmicznych;
- nauczy się wyznaczać dziedzinę funkcji logarytmicznej;
- nauczy się rozwiązywać równania logarytmiczne;
- nauczy się rozwiązywać nierówności logarytmiczne;

Przykładowe zadania

Zadanie 1

Rozwiąż równanie $5\sqrt{\log_2 x} - 3\log_2 \sqrt{\frac{1}{x}} = 16$

Zadanie 2

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)}$

Zadanie 3

Znajdź najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność: $\log_{\frac{1}{2}}(|x^2 - 2x| - 8) > -4$

Zadanie 4

Wyznacz całkowite wartości m, dla których równanie: $mx^2 - (m^2+9)x + \frac{4}{m} = 0$

ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunki: $\log(x_1 + x_2) < 1$ *i* $\log x_1 + \log x_2 < 0$

Zadanie 5

Wykaż, ze funkcja $f(x) = \log\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)$ jest nieparzysta.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY"
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy"

Zadanie 6
Rozwiąż równanie $(\log_3 x)(\log_x(3x)) = 2\log_3 3\sqrt{3}$

Zadanie 7
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 1) - 1\right)$

Zadanie 8
Wykaż, że równanie $\sqrt{-x^2 - 3x - 2} = \log_{2x-1}(2 - x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 9
Funkcja h(x) jest określona wzorem $h(x) = \log_2(x^2 - 4) - \log_2(x - 5)$. Wyznacz wszystkie wartości parametru k dla których równanie $h(x) - \log_2 k = 0$ ma 2 różne pierwiastki.

Zajęcia 11 (3 godz.)

- **Zapis pozycyjny (dziesiętny, binarny i hexa) oraz konwersja między nimi.**
- **Granica niewłaściwa funkcji.**

Cele edukacyjne
Student:
- pozna różne typy zapisów pozycyjnych i będzie potrafił zamieniać jedne na drugie;
- pozna pojęcie granicy funkcji w punkcie;
- nauczy się obliczać granicę funkcji w punkcie;
- pozna pojęcie granicy funkcji w nieskończoności;
- nauczy się obliczać granicę funkcji w nieskończoności;
- pozna pojęcie granicy niewłaściwej funkcji w punkcie i nieskończoności;
- nauczy się obliczać granicę niewłaściwą funkcji w punkcie i nieskończoności;
- nauczy się wyznaczać granice funkcji na krańcach przedziałów określoności;

Zajęcia 12 (3 godz.)

- **Asymptoty wykresu funkcji.**
- **Ciągłość funkcji w punkcie i w zbiorze. Badanie ciągłości funkcji.**
- **Własności funkcji ciągłych.**

Cele edukacyjne
Student:
- nauczy się wyznaczać równania asymptot wykresu funkcji (pionowych, poziomych, ukośnych);
- pozna definicję funkcji ciągłej w punkcie i w zbiorze;
- nauczy się badać ciągłość funkcji w punkcie i w zbiorze;
- zapozna się z własnościami funkcji ciągłych;

Zajęcia 13 (3 godz.)

- **Relacje w zbiorze**
- **Prawdopodobieństwo i jego własności.**
- **Prawdopodobieństwo całkowite**

Cele edukacyjne
Student:

- będzie potrafił wyznaczyć relacje w zbiorze
- zapozna się z regułą dodawania oraz regułą mnożenia;
- pozna takie pojęcia, jak doświadczenie losowe, zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, zdarzenie losowe;
- nauczy się określać zbiór zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, określać jego moc oraz określać zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu;
- pozna klasyczną definicję prawdopodobieństwa (twierdzenie Laplace'a);
- nauczy się rozwiązywać zadania z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa;
- pozna wzór na prawdopodobieństwo całkowite i nauczy się stosować go w zadaniach;

Zajęcia 14 (3 godz.)

- **Sprawdzian z dotychczas omówionych zagadnień (1 godz.)** (Powtórzenie sprawdzianu z zajęć 2)
- **Geometria analityczna (2 godz.)**
  - Wektor, długość wektora, środek odcinka.
  - Równanie prostej.
  - Równanie okręgu.
  - Odległość punktu od prostej i odległość między 2 prostymi równoległymi.

Cele edukacyjne

Student:

- przypomni sobie podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych;
- przypomni sobie, jak oblicza się odległość punktów w układzie współrzędnych;
- pozna metodę wyznaczania współrzędnych środka odcinka;
- pozna warunek na równoległość i prostopadłość wektorów;
- przypomni sobie informacje o równaniu kierunkowym prostej;
- nauczy się zapisywać równanie prostej w postaci ogólnej;
- przypomni sobie warunki na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami kierunkowymi;
- pozna warunki na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami w postaci ogólnej;
- pozna wzór na obliczenie odległości punktu od prostej;
- nauczy się obliczać pole trójkąta, korzystając z współrzędnych wierzchołków trójkąta;
- pozna równanie okręgu;
- nauczy się przekształcać równanie okręgu do postaci kanonicznej;
- nauczy się wyznaczać współrzędne środka i promień okręgu;
- nauczy się zapisywać równanie okręgu o zadanych własnościach (np. stycznego do jednej z osi układu, przechodzącego przez trzy punkty);
- nauczy się wyznaczać współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu;
- nauczy się wyznaczać równanie stycznej do okręgu;
- nauczy się określać wzajemne położenie dwóch okręgów opisanych równaniami;
- nauczy się wyznaczać współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów;
- nauczy się opisywać koło o danym środku i promieniu oraz rysować koło opisane odpowiednią nierównością;
- pozna przekształcenia w układzie współrzędnych, takie jak: symetria osiowa, symetria środkowa, przesunięcie równoległe, jednokładność.

Zajęcia 15 (3 godz.)

- **Omówienie sprawdzianu.**
- **Rozwiązywanie dodatkowych zadań związanych z tematyką, która sprawiła najwięcej trudności studentom.**

Zajęcia będą odbywać się w oparciu o podręczniki do matematyki rozszerzonej wydawnictwa Pazdro.

Projekt „INŻYNIER INFORMATYK – PEWNIAK NA RYNKU PRACY"
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
Poddziałania 4.1.2. „Zwiększenie liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy"